GUIA 1

Ecuaciones diferenciales, conceptos básicos y aplicaciones

Las ecuaciones diferenciales ordinarias son una herramienta básica en las ciencias y las ingenierías para el estudio de sistemas dinámicos (sistemas cuyos estados varían con el tiempo). Ejemplos de sistemas dinámicos son el sistema solar, un sistema ecológico, una economía, un mecanismo artificial (reloj, vehículo, circuito, etc).

En esta guía consideramos:

- Las ecuaciones diferenciales ordinarias como modelos matemáticos de sistemas dinámicos.
- El concepto de ecuación diferencial ordinaria y de solución.

1. Una ecuación diferencial como descripción de un sistema dinámico

En esta guía se considerarán sistemas dinámicos cuyos estados se pueden describir mediante una cantidad escalar que depende de una variable independiente, usualmente el tiempo.

1.1. Modelo de Malthus (crecimiento exponencial)

Como ilustración estudiaremos un modelo de crecimiento de poblaciones aisladas: Los organismos viven en grupos llamados poblaciones. Una característica básica de ellas es su tamaño (estado del sistema), medido por el número total de individuos o por la densidad. En una población aislada, la variación del tamaño es debida fundamentalmente a los procesos de nacimiento y muerte. Para efectos de modelamiento se considerarán las siguientes variables:

- el tamaño $x = x(t)$ de la población en el tiempo t,
- la tasa relativa de crecimiento $\frac{1}{x(t)} \frac{dx}{dt}$ de la población en el tiempo t.

Los ecólogos han planteado distintos modelos para predecir la evolución del tamaño de la población en el tiempo. Estos modelos se basan en supuestos que establecen relaciones entre la tasa relativa de crecimiento de la población y su tamaño. Dichos supuestos se han verificado experimentalmente en algunas situaciones concretas. Estudiaremos ahora uno de los modelos más conocidos, denominado *modelo de Malthus* en honor al economista Thomas Robert Malthus (1766-1834), quien lo planteó por primera vez en su influyente trabajo *Primer ensayo sobre población.*

Este modelo supone que la tasa relativa de crecimiento de la población es constante, es decir, que

$$\frac{1}{x(t)}\frac{dx}{dt} = a, \quad a \text{ constante},$$

o equivalentemente que

$$\frac{dx}{dt} = a\,x(t). \tag{1}$$

Escrito en esa forma el modelo de Malthus es un ejemplo de una *ecuación diferencial.*

Es sencillo calcular explicitamente las soluciones de (1). En efecto, si $x = x(t)$ es solución de (1) con $x(t) \neq 0$ entonces

$$\frac{1}{x(t)}\frac{dx}{dt} = a.$$

Integrando resulta $\ln|x(t)| = at + c_1$, para alguna constante c_1. Exponenciando ambos lados esta ultima ecuación se obtiene

$$x(t) = c\,e^{a\,t}, \; -\infty < t < \infty, \quad \text{con} \quad c = e^{c_1}. \tag{2}$$

Recíprocamente se verifica que $x(t) = c\,e^{at}$ para $-\infty < t < \infty$, c constante real, es una *familia de soluciones de* (1). Finalmente, si $x = x(t)$ satisface la condición $x(t_0) = x_0$ para valores de t_0 y x_0 especificados, entonces $x_0 = c\,e^{a\,t_0}$. Por lo tanto $c = x_0\,e^{-a\,t_0}$, y se tiene

$$x(t) = x_0\,e^{a\,(t-t_0)}, \quad -\infty < t < \infty.$$

Observación. Cuando $a > 0$ se dice que (1) modela un *crecimiento exponencial.* Análogamente se habla de *declinación exponencial* cuando $a < 0$.

1.2. Movimiento rectilíneo en un medio resistivo

Ahora estudiaremos el problema de determinar la velocidad de un cuerpo que cae cerca de la superficie terrestre. Galileo Galilei (1546-1642) mostró experimentalmente que la aceleración de un cuerpo que cae en el vacío cerca de la superficie de la tierra es constante. Teniendo en cuenta que la aceleración es la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo, y considerando como positiva la dirección hacia arriba, el descubrimiento de Galileo en notación moderna puede escribirse como:

$$\frac{dv}{dt} = -g, \quad (\textit{Ley de Galileo de caída libre}), \tag{3}$$

donde v representa la velocidad del cuerpo y g es una constante, que en el sistema MKS toma el valor aproximado de $g \approx 9{,}8\,m/s^2$. Si en el instante t_0 la velocidad es

v_0, entonces mediante integración se llega a la fórmula para la velocidad en el caso del movimiento uniformemente acelerado

$$v(t) = v_0 - g\,(t - t_0)\,.$$

Cuando un cuerpo cae en un medio diferente del vacío, tal como aire o agua, éste ejerce una *fuerza de fricción* que afecta la velocidad de caída. Es conveniente plantear el problema en términos de la segunda ley de de Newton (Isaac Newton 1642-1727), de acuerdo con la cual *el producto de la masa por la aceleración del cuerpo es igual a la suma de las fuerzas que actúan sobre éste*:

$$m\frac{dv}{dt} = \Sigma f, \quad (\textit{Segunda ley de Newton}). \tag{4}$$

Supongamos que sólo actúan la fuerza de la gravedad f_W y la fuerza de fricción f_R. Es decir $\Sigma f = f_W + f_R$. En cuanto a la fuerza de gravedad sabemos que cerca de la superficie terrestre

$$f_W = -m\,g,$$

y en cuanto a la fuerza de fricción, un modelo validado experimentalmente es

$$f_R(v) = -\gamma\,v, \quad \gamma \text{ una constante positiva.}$$

De acuerdo a la segunda ley de Newton se tiene que

$$m\frac{dv}{dt} = f_W + f_R = -m\,g - \gamma\,v,$$

equivalentemente

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{\gamma}{m}\,v. \tag{5}$$

Esta última relación puede verse como una corrección de la ecuación de caida libre (3) que tiene en cuenta la resistencia del medio. En un medio no resistivo ($\gamma = 0$), la relación (5) se reduce a la ecuación de caida libre (3).

La ecuación (5) relaciona a v con su derivada $\frac{dv}{dt}$. Este es un ejemplo de una *ecuación diferencial de primer orden*. Lo de primer orden se refiere a que sólo aparecen primeras derivadas de la función incógnita $v = v(t)$.

Ahora determinaremos la solución $v = v(t)$ de (5). Observe que podemos reescribir (5) en la forma

$$\frac{\frac{dv}{dt}}{g + \frac{\gamma}{m}\,v(t)} = -1.$$

Integrando se tiene que

$$\ln\left|g + \frac{\gamma}{m}\,v(t)\right| = -\frac{\gamma}{m}\,t + c_1,$$

donde c_1 es una constante cualquiera. Despejando $v(t)$ tenemos

$$v(t) = c\, e^{-\frac{\gamma}{m}\, t} - \frac{m\, g}{\gamma}, \tag{6}$$

donde $c = \frac{m\, e^{c_1}}{\gamma}$ es una constante arbitraria. Si en el instante inicial t_0 la velocidad inicial es v_0 podemos obtener el valor de la constante c. En efecto:

$$v_0 = c\, e^{-\frac{\gamma}{m}\, t_0} - \frac{m\, g}{\gamma}.$$

Despejando c y reemplazando en (6) tenemos

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{m\, g}{\gamma} \right) e^{-\frac{\gamma}{m}\,(t-t_0)} - \frac{m\, g}{\gamma}. \tag{7}$$

2. El concepto de solución

La ley de Malthus para la evolución del tamaño de una población y las leyes que gobiernan la velocidad de un cuerpo que cae en un medio resistivo son ejemplos de modelos que dan lugar a *ecuaciones diferenciales ordinarias.* Por una *ecuación diferencial ordinaria de orden* m para una función incógnita $u = u(t)$, que depende de una variable real t, se entiende una condición expresada en la forma

$$E\left(t, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^m u}{dt^m} \right) = 0, \tag{8}$$

que relaciona los valores de la función $u = u(t)$ con los de algunas de sus derivadas y posiblemente con los de la variable independiente t. El *orden* de la ecuación es el orden m de la derivada más alta de $u = u(t)$ que aparece en la ecuación.

Definición 1. *Una solución de la ecuación diferencial* (8) *en un intervalo* I *es una función* $u = u(t)$*, definida en* I *y con valores en* $\mathbb{R}$ *tal que:*

- $u = u(t)$ *es continua y posee derivadas* $\frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^m u}{dt^m}$ *hasta el orden* m *en* I*.*
- $u = u(t)$ *satisface* (8) *en* I*. Es decir,* $E\left(t, u(t), \frac{du}{dt}(t), \dots, \frac{d^m u}{dt^m}(t)\right) = 0$*, para todo* $t \in I$*.*

El intervalo I *se llama el intervalo de definición de la solución* $u(t)$*.*

En discusiones de carácter general, se hace necesario considerar ecuaciones en *forma normal*

$$\frac{d^m u}{dt^m} = f(t, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}}), \tag{9}$$

es decir, resuelta para la derivada de u de orden más alto m.
Estudiaremos algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Las funciones de la forma $x(t) = c\,e^{2t}$ (c constante) son soluciones de $\frac{dx}{dt} = 2x$ en $I = (-\infty, \infty)$.

Ejemplo 2. Toda función de la forma $\theta(t) = a\,\cos\omega\,t + b\,\mathrm{sen}\,\omega\,t$ $\quad (a, b$ constantes) es solución de

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0, \quad (\omega > 0 \quad \text{constante}),$$

en $I = (-\infty, \infty)$.

Ejemplo 3. $x(t) = \frac{1}{t}$ es solución de $\frac{dx}{dt} = -x^2$ en $(0, \infty)$ y también en $(-\infty, 0)$.

Ejemplo 4. De acuerdo con la definición que hemos presentado no son ecuaciones diferenciales ordinarias las siguientes:

- $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (ecuación del calor), para una función $u = u(x, t)$.
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (ecuación de Laplace), para $u = u(x, y)$.

Estas son *ecuaciones en derivadas parciales.*

3. Teorema Fundamental (una dimensión).

Una ecuación diferencial ordinaria define una colección de funciones de una variable real. Cada una de estas funciones queda determinada especificando condiciones adicionales, por ejemplo una condición inicial. El teorema de existencia y unicidad de soluciones que formularemos en esta sección precisa esta idea.

Teorema 1 (Teorema Fundamental)**.** *(Existencia y unicidad de soluciones). Sea*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{10}$$

una ecuación diferencial tal que la función $f = f(t, x)$ satisface

C1) *$f(t, x)$ es continua para $t \in J$ y $x \in \Omega$, donde J y Ω son intervalos abiertos en $\mathbb{R}$.*

C2) *La derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ existe y es función continua de (t, x) para t en J y x en Ω.*

Entonces para cada $t_0 \in J$ y $x_0 \in \Omega$ existen un intervalo abierto I incluido en J y que contiene a t_0, y una función $x = x(t)$ definida en I, tal que $x = x(t)$ es la única solución de (10) *definida en I que satisface la condición inicial $x(t_0) = x_0$.*

Sobre la demostración. Una demostración de este teorema, por ejemplo la debida a É. Picard (1890), requiere de la utilización cuidadosa de métodos del cálculo avanzado. No se hará aquí, ver por ejemplo, G. Simmons, Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas, McGraw-Hill, 1993.

Presentaremos dos consecuencias importantes del teorema. La primera es que la ecuación diferencial (10) tiene infinitas soluciones, exactamente una de ellas satisface la condición inicial $x(t_0) = x_0.$ La segunda, es que si $x = x(t)$ y $y = y(t)$ son dos soluciones de (10) en el mismo intervalo I, entonces los gráficos

$$\left\{(t, x(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in I\right\}, \quad \left\{(t, y(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in I\right\}$$

o no se interceptan o son idénticos.

Ejemplo 5. El Teorema Fundamental es aplicable a la ecuación $\frac{dx}{dt} = x$, con $f(t,x) = x$, $J = \mathbb{R}$ y $\Omega = \mathbb{R}$. Igualmente es aplicable a $\frac{dx}{dt} = -x^2$, con $f(t,x) = -x^2$, $J = \mathbb{R}$ y $\Omega = \mathbb{R}$.

Ejemplo 6. El Teorema Fundamental no es aplicable para garantizar la existencia de una solución de $t\frac{dx}{dt} = x$ que satisfaga la condición inicial $x(0) = 0.$ En efecto, la ecuación en su forma normal es $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}$, cuyo lado derecho $f(t,x) = \frac{x}{t}$ no puede definirse en $(x,t) = (0,0)$ de forma continua. Obsérvese que $x_1(t) \equiv 0$ y $x_2(t) = t$ son dos soluciones distintas, definidas en $-\infty < t < \infty$ y que satisfacen la condición inicial $x(0) = 0$.

Ejemplo 7. El Teorema Fundamental no permite garantizar la existencia de una única solución de $\frac{dx}{dt} = 3\,x^{2/3}$ que satisfaga la condición inicial $x(0) = 0$. La función $f(t,x) = 3\,x^{2/3}$ está definida y es continua para todo (t,x) con t en $J = \mathbb{R}$ y x en $\Omega = \mathbb{R}$. Sin embargo, $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = 2\,x^{-1/3}$, no está definida en puntos de la forma $(t,0)$. Como ejercicio se propone verificar que las funciones $x_1(t) = 0$ y $x_2(t) = t^3$ son dos soluciones distintas definidas en $-\infty < t < \infty$ que satisfacen la condición inicial $x(0) = 0$.

Ejemplo 8. La soluciones, cuya existencia esté garantizada por el Teorema Fundamental, no tienen por qué estar definidas para todo valor de t en el intervalo J de definición de $f = f(t,x)$. Tal es el caso de la ecuación $\frac{dx}{dt} = -x^2$, con $f(t,x) = -x^2$ definido para t en $J = \mathbb{R}$ y x en $\Omega = \mathbb{R}$. Las condiciones C1) y C2) del Teorema Fundamental se verifican sin dificultad. La única solución que satisface la condición inicial $x(1) = 1$ es $x(t) = \frac{1}{t}$ definida en $(0, \infty)$.

4. Campos de direcciones

Teniendo presente la interpretación de la derivada $x'(t)$ de una función diferenciable x como la pendiente de la recta tangente al gráfico de $x = x(t)$ en el punto $(t, x(t))$, se presentará una interpretación geométrica de las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria (10). En la discusión se supondrá que (10) satisface las hipótesis del teorema Fundamental. En aras de simplificar la discusión supondremos que $J = \mathbb{R}$ y $\Omega = \mathbb{R}$.

La idea consiste en asignar a cada punto (t, x) del plano, un segmento de recta de longitud fija que pasa por (t, x) y que tiene pendiente $f(t, x)$, tal como se muestra en la figura 1. Nótese que la solución de la ecuación diferencial (10) cuyo gráfico pasa por (t, x) es tangente al segmento construido en (t, x). Esto se ilustra en la figura 2.

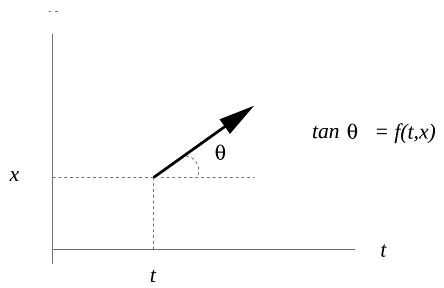


Figura 1:

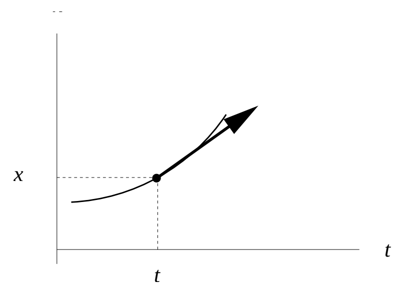


Figura 2:

Ahora bien, trazando estos segmentos en cada punto del plano obtenemos el llamado *campo de direcciones de la ecuación diferencial.* La figura 3 ilustra el campo de direcciones de la ecuación diferencial $x' = x$

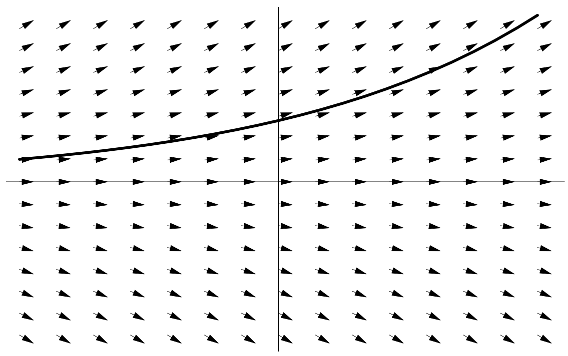


Figura 3: Una solución y el campo de direcciones de $\frac{dx}{dt} = x$

En este contexto las soluciones $x = x(t)$ de la ecuación diferencial (10) son curvas diferenciables con gráficos en el plano y tangentes al campo de direcciones en cada punto. En aquellos casos en que no se puede encontrar un solución general cerrada, la técnica del campo de direcciones es una fuente de valiosa información.

Observaciones sobre la notación. Dado que la motivación presentada en esta guía está basada en modelos que dependen del tiempo, resulta natural emplear la letra t para denotar la variable temporal independiente, y con otra letra, digamos x a la variable dependiente. Asi $x(t)$ denotará por ejemplo la población o la posición de un cuerpo en el instante t. Ahora bien, no hay nada de malo en denotar con letras distintas a las variable dependiente e independiente. De hecho, solo el contexto o la tradición indican la mejor notación. Obsérvese que

$$\frac{dx}{dt} + x = \cos t, \quad \frac{dy}{dx} + y = \cos x, \quad \frac{dx}{dy} + x = \cos y$$

son formas distintas de escribir la misma ecuación diferencial.

Ejercicios

1. (Modelo de Malthus para la población mundial) Sea $x(t)$ la población humana mundial en el tiempo t (en años). En $t = 1961$ la población se estimó en 3060 millones. Suponga que la población mundial crece según una ley de Malthus con tasa anual de crecimiento del 2 %. **a)** Escriba la ley de crecimiento y halle $x(t)$ tal que $x(1961) = 3{,}06 \times 10^9$, **b)** halle el tiempo T necesario según el modelo para que $x(t)$ duplique su tamaño cada T años (compare lo observado: la población mundial se ha estado duplicando cada 35 años), **c)** halle las poblaciones predichas por el modelo de Malthus para los años 2000, 2510, 2635 y 2670 (Compare con la superficie total de la Tierra aproximadamente $1{,}86 \times 10^{15} m^2$, bajo el supuesto de que una persona ocupa 0,09 m^2).

2. Demuestre que cualquier solución $v = v(t)$ de (5) que modela la caída de un cuerpo en un medio resistivo satisface $\lim_{t\to\infty} v(t) = -\frac{m\,g}{\gamma}$ ¿Cuál es la interpretación de este resultado? ¿Cuál sería el límite si $v = v(t)$ fuera solución de la ecuación diferencial resultante del modelo de caída libre de Galileo?

3. Verifique que

$$x_1(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad x_2(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \int_0^t e^{\frac{s^2}{2}} ds$$

son soluciones de la ecuación diferencial $x'' + t\,x' + x = 0$ definidas en $\mathbb{R}$.

4. Suponga que $x = x(t)$ es solución de la ecuación diferencial $\frac{d^2x}{dt^2} - t\,x = 2$ y satisface las condiciones inicilaes $x(0) = 1$, y $x'(0) = 1$. Calcule $\left.\frac{d^3x}{dt^3}\right|_{t=0}$.

5. En cada caso determine si la función es solución de la ecuación dada en el intervalo indicado.

1. $y(t) = ce^{at} - \frac{b}{a}$, $\quad t \in \mathbb{R}$, $\quad (a, b, c$ constantes); $\quad \frac{dy}{dt} = ay + b$.

2. $x(t) = \ln t, \quad 0 < t < \infty; \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0, \quad (m, c, k \text{ constantes}).$

3. $u(t) = \tan t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{du}{dt} = 1 + u^2.$

4. $y(x) = \frac{1}{a}\cosh a\,x, \quad x \in \mathbb{R}\ ; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = a\sqrt{1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \quad (a \text{ constante}).$

6. Demuestre que $x(t) = e^{\lambda t}$ (λ constante) definida en $t \in \mathbb{R}$ es solución de

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\,\frac{dx}{dt} + b\,x = 0, \quad (a, b \ \text{ constantes}) \tag{11}$$

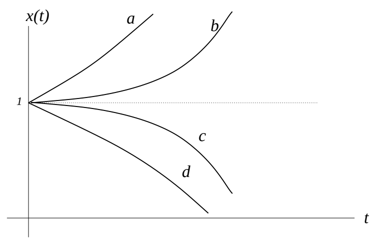
si y sólo si $\lambda^2 + a\,\lambda + b = 0$. Verifique que si $u_1(t)$ y $u_2(t)$ son soluciones de la ecuación (11), entonces $c_1\,u_1(t) + c_2\,u_2(t)$ es solución para todo par de reales c_1 y c_2. Utilice lo anterior para hallar una solución de la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\,\frac{dx}{dt} - 3\,x = 0,$$

que satisfaga las condiciones iniciales $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.

7. Muestre que $y_1(x) = \operatorname{sen} x$ y $y_2(x) = 2\operatorname{sen} x$ son soluciones distintas de $y'' + y = 0$ que satisfacen la misma condición inicial $y(0) = 0$. Explique por qué no se contradice el Teorema Fundamental.

8. De las curvas que aparecen en el gráfico siguiente ¿Cuál es la que mejor bosqueja el gráfico de la solución $x = x(t)$ de la ecuación diferencial $\frac{d^2x}{dt^2} + (1 + t)\,x = 0$ que satisface $x(0) = 1$ y $x'(0) = 0$?



9. Para $\frac{dx}{dt} = x(1 - x)$ verifique que el teorema fundamental es aplicable con $J = \mathbb{R}$, $\Omega = \mathbb{R}$

10. Halle las soluciones de la forma $x(t) = t^k$, $t \in \mathbb{R}$, de la ecuación diferencial $2t^2x'' + 3t\,x' - x = 0$.

11. Muestre que existen infinitas soluciones de:

$$\frac{dx}{dt} = t^2 + 1 + \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Muestre además que cualquier solución es estrictamente creciente.

12. Halle una ecuación diferencial de primer orden de la forma $\frac{dx}{dt} = f(x)$ que que tenga como solución a la función $x(t) = \operatorname{sen} t$ en un intervalo adecuado.

13. Esboce el campo de direcciones correspondiente a la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = -x$. En particular determine un segmento tangente en el punto $(0,1)$. Compruebe que $x(t) = e^{-t}$ es una solución de la ecuación diferencial y que este segmento es tangente a la gráfica de $x = x(t)$ en el punto $(0,1)$.

Respuestas a ejercicios seleccionados

1. (a) $x(t) = 3{,}06 \times 10^9 \times e^{0{,}02(t-1961)}$. (b) $T = 34{,}66$ años. (c) La relación está ilustrada en la siguiente tabla.

Año	Población	Superficie ocupada
2000	$6{,}67531 \times 10^9$	$6{,}007775 \times 10^8$
2510	$1{,}79587 \times 10^{14}$	$1{,}616283 \times 10^{13}$
2635	$2{,}18782 \times 10^{15}$	$1{,}969036 \times 10^{14}$
2670	$4{,}40572 \times 10^{15}$	$3{,}965150 \times 10^{14}$

4. $\left.\frac{d^3x}{dt^3}\right|_{t=0} = 1.$

6. $x(t) = \frac{3}{4}e^{3t} + \frac{1}{4}e^{-t}$.

8. c

10. $k = -1$ y $k = \frac{1}{2}$.

12. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$. $x = \operatorname{sen} t$ es solución en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.